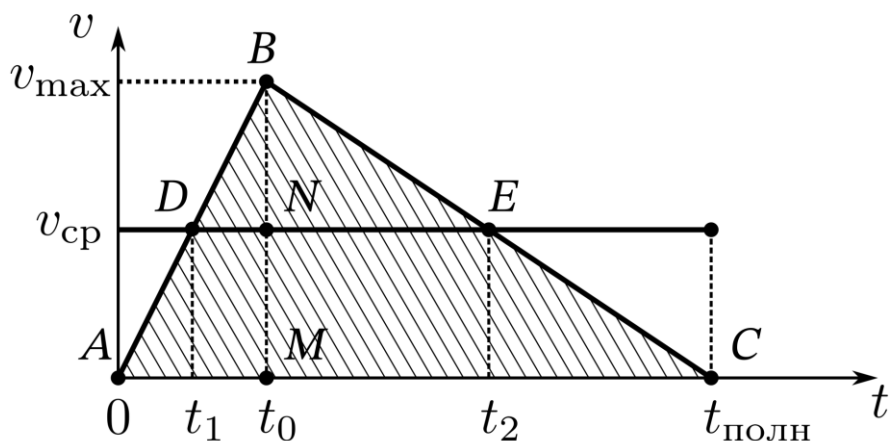


Задача 1. Средняя скорость

Автомобиль сначала разгоняется из состояния покоя с некоторым постоянным ускорением a_1 , а затем тормозит с постоянным ускорением a_2 до полной остановки. Оказалось, что в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 5$ с мгновенная скорость автомобиля была равна его средней скорости $v_{\text{ср}}$ на всём пути от начала движения. Полный пройденный автомобилем путь к моменту остановки составил $s = 24$ м. Найдите момент времени t_0 начала торможения, полное время в пути $t_{\text{полн}}$, среднюю скорость автомобиля на всём пути $v_{\text{ср}}$ и величины ускорений a_1 и a_2 .

Решение

Задачу удобно решить графически. Изобразим график зависимости мгновенной скорости автомобиля от времени и покажем на нём уровень средней скорости $v_{\text{ср}}$ и максимальной достигнутой скорости v_{max} , момент начала торможения t_0 и полное время в пути $t_{\text{полн}}$.



Полный пройденный путь s — это площадь под графиком скорости $v(t)$:
 $s = \frac{1}{2} v_{\text{max}} t_{\text{полн}}$. С другой стороны, по определению средней скорости $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_{\text{полн}}}$
 и $s = v_{\text{ср}} \cdot t_{\text{полн}}$ (путь s также является площадью под прямой средней скорости).
 Отсюда получаем, что максимальная скорость за время движения была в 2 раза больше средней: $v_{\text{max}} = 2 v_{\text{ср}}$.

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
 Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Пользуясь графиком, легко определить t_0 и $t_{\text{полн}}$. Из подобия треугольников АВМ и DBN получаем $t_0 = 2t_1 = 2$ с, а из подобия треугольников МВС и NBE $t_{\text{полн}} - t_0 = 2(t_2 - t_0)$, откуда полное время в пути $t_{\text{полн}} = t_0 + 2(t_2 - t_0) = 8$ с.

Поскольку пройденный путь $s = v_{\text{ср}} \cdot t_{\text{полн}}$, найдём среднюю скорость $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_{\text{полн}}} = \frac{24 \text{ м}}{8 \text{ с}} = 3 \text{ м/с}$. Рассматривая первый и второй участок пути, легко найти ускорения автомобиля. Если взять точки А и D, получим

$$a_1 = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_{\text{ср}} - 0}{t_1 - 0} = \frac{3 \text{ м/с}}{1 \text{ с}} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

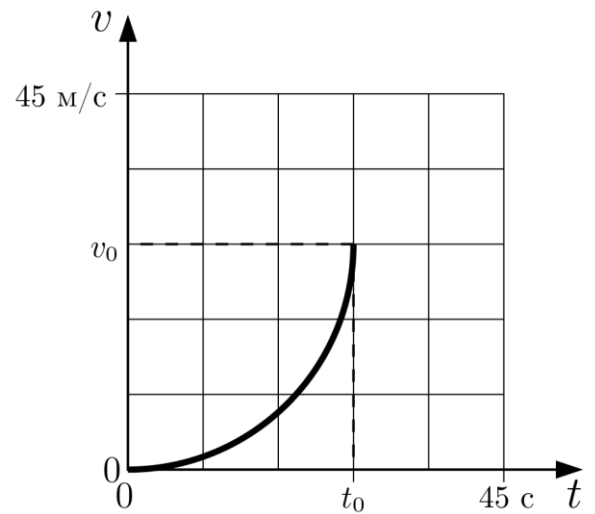
Для участка торможения, взяв точки В и Е, получаем

$$a_2 = \frac{\Delta v_{BE}}{\Delta t_{BE}} = \frac{v_{\text{ср}} - v_{\text{max}}}{t_2 - t_0} = \frac{v_{\text{ср}} - 2v_{\text{ср}}}{(5 - 2) \text{ с}} = \frac{(3 - 6) \text{ м/с}}{(5 - 2) \text{ с}} = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, нашли ответы на все вопросы задачи: момент времени начала торможения $t_0 = 2$ с, полное время в пути $t_{\text{полн}} = 8$ с, средняя скорость автомобиля на всём пути $v_{\text{ср}} = 3 \text{ м/с}$, ускорения автомобиля $a_1 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и $a_2 = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 2. Утрата

Космический корабль, летая достаточно близко над астероидом радиуса $R = 33,35$ км и массой $M = 1.6674 \cdot 10^{19}$ кг, неожиданно для него самого выронил один из своих двигателей. Корабль начал падать, причем таким образом, что его скорость увеличивалась со временем как дуга окружности (см. график). Начальные скорости корабля и двигателя равны нулю.



Постройте график изменения скорости двигателя во времени. Какой угол он будет составлять с осью абсцисс?

Какой объект упадет первым, если известно, что это случится через время $t_0 = 27$ с? Какой путь должен пройти второй объект от момента t_0 до своего падения?

Значение гравитационной постоянной: $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{ м}^2 / \text{ кг}^2$.

Решение

Двигатель падает без начальной скорости, поэтому $v_{\text{дв}} = g_a t$, где g_a – ускорение свободного падения вблизи астероида:

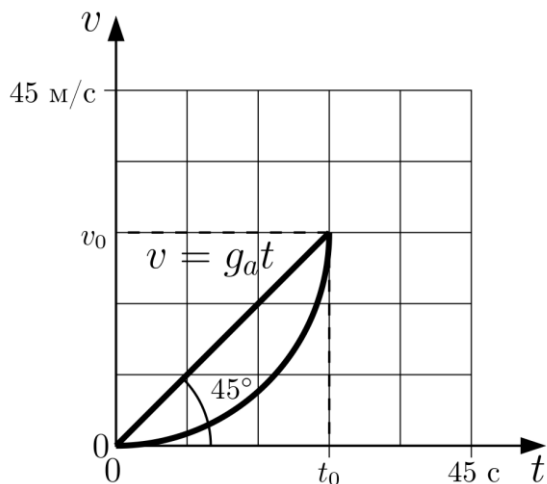
$$\begin{aligned}
 F = ma = mg_a, \quad G \frac{mM}{R^2} = mg_a &\Rightarrow g_a = G \frac{M}{R^2} \\
 &= 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{ м}^2 / \text{ кг}^2 \frac{1.6674 \cdot 10^{19} \text{ кг}}{(33,35 \cdot 10^3 \text{ м})^2} \approx 1 \text{ м/с}^2.
 \end{aligned}$$

То есть график $v = g_a t$ будет составлять угол 45° по отношению к оси времени.

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Из графика видно, что двигатель проходит больший путь за время $t_0 \Rightarrow$ он упадет первым.

Разность площадей под графиками $v(t)$ и будет представлять необходимую разность пройденных путей, т.е. путь, оставшийся кораблю от момента t_0 до своего падения:

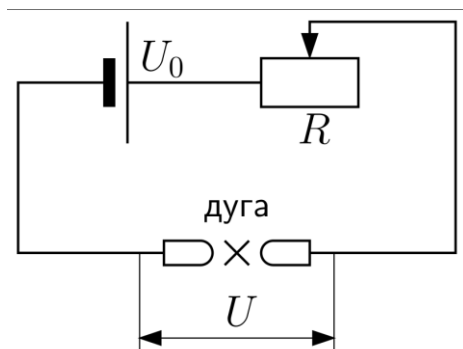


$$S_{\text{дв}} = \frac{1}{2} v_0 t_0 = \frac{1}{2} g_a t_0^2, \quad S_{\text{к}} = v_0 t_0 - \frac{\pi}{4} v_0 t_0 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) g_a t_0^2$$

$$\Delta S = S_{\text{дв}} - S_{\text{к}} = \frac{g_a t_0^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 208 \text{ м}$$

Задача 3. Сварка

Сварочный аппарат можно приближённо рассматривать как идеальный источник постоянного напряжения $U_0 = 115$ В с реостатом для ограничения максимального тока в цепи. Напряжение подается по проводам на электрод и заготовку, между которыми и зажигается дуга. Участок цепи с ней можно описать приближенной формулой вида $U = 55 + \frac{45}{I}$, где I – ток, идущий через этот участок цепи. Пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления реостата, определите значение сопротивления R_1 при котором дуга перестает зажигаться. Какое значение сопротивления R_2 нужно выставить на реостате, чтобы ограничить максимальный ток значением $I_1 = 50$ А? Помогите сварщику взять нужный кабель: считая, что тепловыделение на сварочном кабеле не может быть более $W = 45$ Вт/м, определите подходящую для предельного тока $I_2 = 200$ А площадь сечения кабеля S . Удельное сопротивление кабеля $\rho = 0.018$ Ом · мм²/м. Воспользуйтесь тем, что напряжение на источнике U_0 равняется сумме напряжения на реостате и напряжения U на участке с дугой.



Решение

Пусть I — ток, текущий в цепи, а R — сопротивление реостата. Воспользовавшись тем, что напряжение на источнике U_0 равняется сумме напряжения на реостате и напряжения U на участке с дугой, мы получим уравнение, связывающее все параметры цепи:

$$U_0 = IR + U$$

$$IR + 55 + \frac{45}{I} - U_0 = 0$$

Умножим обе части на ток I и получим квадратное уравнение:

$$I^2R + I(55 - U_0) + 45 = 0$$

Решив квадратное уравнение, получаем ответ для тока I :

$$I_{1,2} = \frac{U_0 - 55 \pm \sqrt{(55 - U_0)^2 - 4 \cdot R \cdot 45}}{2R}$$

Решение для тока будет существовать до тех пор пока дискриминант будет положительный, соответственно, крайняя точка будет при равенстве нулю дискриминанта. Отсюда найдем искомое сопротивление R_1 , после которого дуга перестает зажигаться:

$$(55 - 115)^2 = 4 \cdot R_1 \cdot 45$$

В итоге $R_1 = 20$ Ом, это предельное сопротивление реостата.

Вернемся к первому уравнению и воспользуемся им для того чтобы найти значение сопротивления R_2 при котором в цепи будет течь ток $I_1 = 50$ А:

$$R_2 = \frac{U_0 - 55}{I_1} + \frac{45}{I_1^2} = \frac{115 - 55}{50} + \frac{45}{50^2} = 1.218 \approx 1.2 \text{ Ом}$$

Пусть 1 метр кабеля имеет сопротивление r , тогда согласно закону Джоуля-Ленца тепловыделение на нем при токе I_2 будет составлять: $W = I_2^2 r$. Из этого уравнения получим условие для величины сопротивления по предельному тепловыделению: $r = W/I_2^2$.

С другой стороны, внутреннее сопротивление кабеля с сечением S , удельным сопротивлением ρ и длиной l может быть вычислено по формуле:

$$r = \frac{\rho l}{S}$$

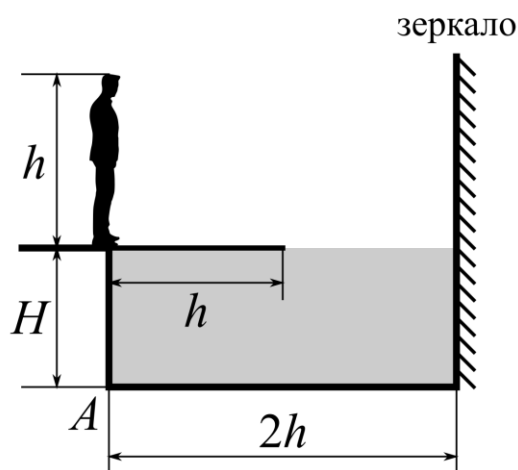
Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Приравнивая две формулы для сопротивления r и учитывая, что $l = 1\text{ м}$, получим формулу для сечения провода S :

$$S = \frac{I_2^2 \rho l}{W} = \frac{200^2 \cdot 0.018 \cdot 1}{45} = 16 \text{ мм}^2$$

Задача 4. Бассейн

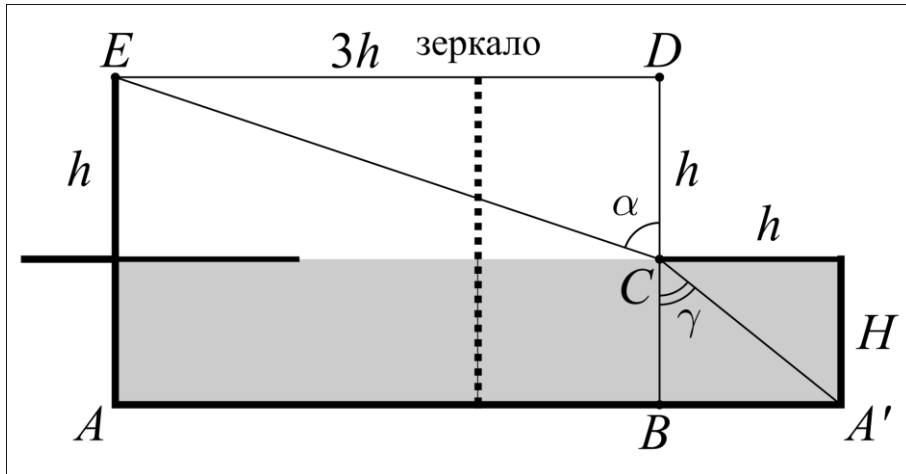
Человек ростом $h = 1.80$ м стоит на краю бассейна с неизвестной глубиной H , который в длину в два раза больше его роста (см. рисунок). Ближняя к человеку половина бассейна закрыта непрозрачным тентом длиной h . Дальняя от человека стенка зеркальная. Найдите минимальную глубину бассейна H , при которой человек сможет увидеть угол бассейна A , находящийся под тентом. На каком минимальном расстоянии от левой стенки при этом будет находиться точка, которую человек будет видеть дважды (напрямую и в отражении)? Показатель преломления воды в бассейне $n = 1,33$, дно равномерно освещено, поверхность воды абсолютно ровная.



Решение

Построим отражение бассейна в зеркале и покажем ход предельного луча, который ограничивает область, которую видит человек. Искомой минимальной глубине бассейна соответствует случай, когда этот луч попадёт в отражение угла A' .

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс



Запишем закон преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n.$$

Из треугольника ECD найдём $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{ED}{EC} = \frac{3h}{\sqrt{(3h)^2 + h^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Из треугольника $A'BC$ найдём $\sin \gamma$:

$$\sin \gamma = \frac{A'B}{A'C} = \frac{h}{\sqrt{H^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1}}.$$

Получаем

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1} = n.$$

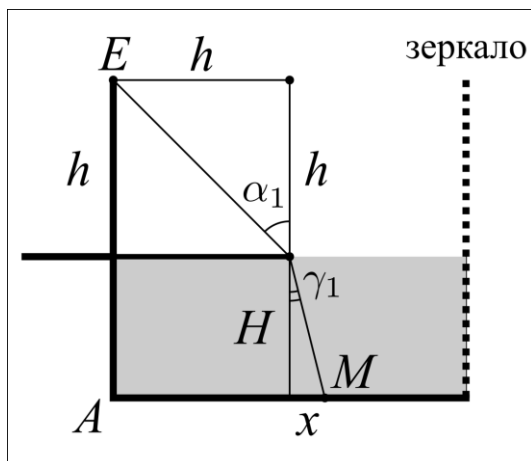
$$\frac{9}{10} \left(\left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1 \right) = n^2.$$

Отсюда находим искомую глубину бассейна H :

$$H = h \sqrt{\frac{10}{9} n^2 - 1} \approx 1.77 \text{ м.}$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
 Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Теперь определим положение самой левой точки, которую человек будет видеть дважды. В зеркало человек видит дно бассейна целиком, следовательно, это будет крайняя точка, которую человек видит напрямую. Сделаем построение.



Обозначим за x расстояние от середины бассейна до искомой точки M .

Тогда

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = n, \quad \sin \alpha_1 = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H}{x}\right)^2 + 1}}.$$

Получаем

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{H}{x}\right)^2 + 1} = n, \quad \frac{1}{2} \left(\left(\frac{H}{x}\right)^2 + 1 \right) = n^2, \quad x = \frac{H}{\sqrt{2n^2 - 1}}.$$

Подставляя значение H , получаем

$$x = h \sqrt{\frac{\frac{10}{9}n^2 - 1}{2n^2 - 1}}.$$

Расстояние L от левой стенки до точки M равно $L = h + x$:

$$L = h \left(1 + \sqrt{\frac{\frac{10}{9}n^2 - 1}{2n^2 - 1}} \right) \approx 2,91 \text{ м.}$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Таким образом, мы нашли минимальную глубину бассейна $H \approx 1.77$ м и минимальное расстояние от левой стенки до точки, которую человек будет видеть дважды, $L \approx 2,91$ м.

Задача 5. Холодные шарики

Школьник Петя проводит в лаборатории следующий эксперимент. У него есть калориметр с $m_c = 250$ г этилового спирта неизвестной начальной температуры t_c . Петя погружает в калориметр одинаковые металлические шарики с неизвестной массой $m_{ш}$ и измеряет температуру t в калориметре после достижения теплового равновесия. Изначально все шарики имеют одинаковую температуру $t_0 = 0^\circ\text{C}$. К сожалению, Петя начал записывать результаты измерений только после погружения второго шарика, и у него получилась таблица, содержащая значения установившейся температуры t в калориметре в зависимости от числа погруженных шариков N :

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t, ^\circ\text{C}$	34,0	31,5	29,5	27,5	26,0	24,5	23,5	22,0	21,0

1) Предложите такие величины X и Y , чтобы X зависела только от числа шариков N , а Y — только от установившейся температуры t , а функция $Y(X)$ была линейной. Постройте график $Y(X)$ по имеющимся данным.

2) С помощью анализа этого графика определите массу одного шарика $m_{ш}$ и начальную температуру спирта t_c .

Теплоёмкость спирта $c_c = 2,47 \frac{\text{Дж}}{\text{г}\cdot^\circ\text{C}}$, теплоёмкость материала шариков $c_{ш} = 1,83 \frac{\text{Дж}}{\text{г}\cdot^\circ\text{C}}$. После достижения равновесия шарики не извлекались из калориметра, теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Решение

Запишем уравнение теплового баланса после погружения в калориметр N шариков:

$$Nc_{ш}m_{ш}(t - t_0) + c_c m_c (t - t_c) = 0.$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Раскроем скобки и учтём, что $t_0 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$:

$$Nc_{\text{ш}}m_{\text{ш}}t + c_c m_c t - c_c m_c t_c = 0.$$

Выразим установившуюся температуру:

$$t(Nc_{\text{ш}}m_{\text{ш}} + c_c m_c) = c_c m_c t_c,$$

$$t = \frac{c_c m_c t_c}{Nc_{\text{ш}}m_{\text{ш}} + c_c m_c} = \frac{t_c}{\frac{c_{\text{ш}}m_{\text{ш}}}{c_c m_c} N + 1}.$$

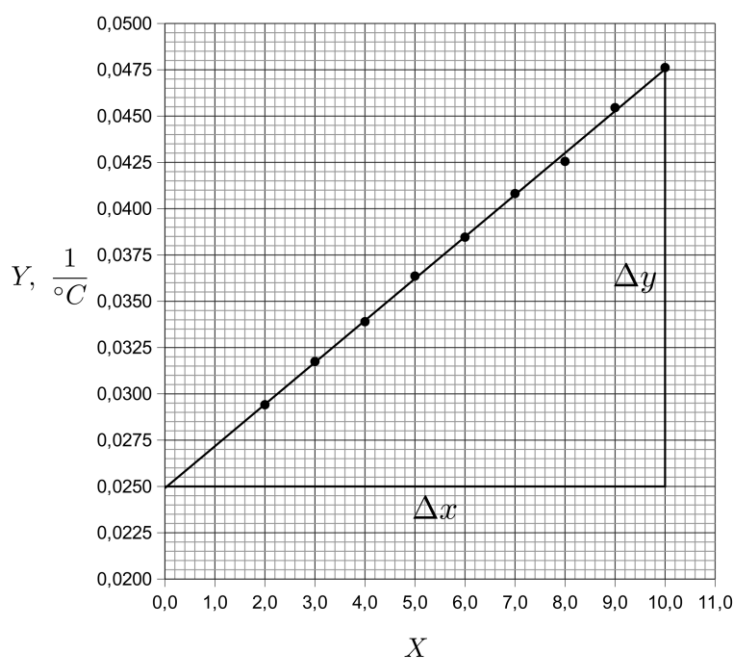
Чтобы получить линейную функцию, рассмотрим величину $Y = \frac{1}{t}$:

$$Y = \frac{1}{t} = \frac{\frac{c_{\text{ш}}m_{\text{ш}}}{c_c m_c} N + 1}{t_c} = \frac{c_{\text{ш}}m_{\text{ш}}}{t_c c_c m_c} N + \frac{1}{t_c}.$$

Тогда в качестве величины X нужно выбрать количество шариков N :

$$Y = \frac{c_{\text{ш}}m_{\text{ш}}}{t_c c_c m_c} X + \frac{1}{t_c} = aX + b.$$

Построим график этой функции, проведём прямую линию через точки:



Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс

Из координаты пересечения прямой с осью OY найдём коэффициент $b = 0,0250 \frac{1}{^\circ C}$, откуда определим начальную температуру спирта $t_c = \frac{1}{b} = 40^\circ C$.

Тангенс угла наклона графика позволит определить массу одного шарика m_{III} :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0475 - 0,0250}{10 - 0} = 2,25 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ C}.$$

$$a = \frac{c_{III} m_{III}}{t_c c_c m_c} \Rightarrow m_{III} = \frac{a t_c c_c m_c}{c_{III}} = \frac{2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 2,47 \cdot 250}{1,83} = 30 \text{ г.}$$