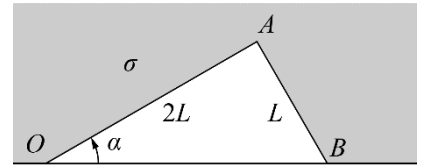


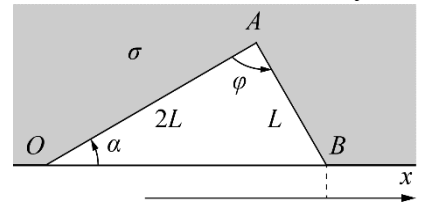
**11.1. Треугольник и плёнка.** Лёгкие стержни  $OA$  и  $AB$  соединены шарнирно между собой. Конец  $O$  стержня  $OA$  закреплён шарнирно на гладкой спице, а на конце  $B$  стержня  $AB$  прикреплено с помощью шарнира маленькое колечко массы  $m$ , которое может скользить по спице. Длины стержней различаются в два раза:  $|AB| = L$ ,  $|OA| = 2L$ , все шарниры невесомы. Система снаружи (до закреплённой внешней границы) окружена двусторонней плёнкой с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . В области между спицей и стержнями плёнки нет. Силу тяжести не учитывайте.



- 1) Найдите величину угла  $\alpha$  в положении равновесия.
- 2) Найдите период малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

**11.1. Возможное решение. Способ 1 (энергетика).**

1) В состоянии равновесия энергия системы должна быть минимальна. В данном случае энергия системы – это энергия натянутой плёнки, которая пропорциональна площади плёнки: с учётом того, что плёнка двусторонняя,  $E_{пл} = 2\sigma S_{пл}$ . Ясно, что минимум этой энергии отвечает положению стержней, в котором максимальна площадь треугольника  $OAB$ . Её удобно вычислять по двум сторонам ( $OA$  и  $AB$ ) и углу  $\varphi$  между ними:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} L \cdot 2L \cdot \sin(\varphi) = L^2 \sin(\varphi).$$

Эта площадь максимальна при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то есть когда стержни перпендикулярны друг другу, и поэтому в прямоугольном треугольнике  $OAB$   $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$ . Итак, в состоянии равновесия

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ.$$

2) Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому мы можем считать энергию системы в положении равновесия равной нулю. Тогда энергия системы в положении, в котором колечко сдвинулось вдоль стержня в точку с координатой  $x$ , отсчитываемой от положения равновесия (см. рисунок), равна

$$E(x) = 2\sigma[L^2 - S_{OAB}(x)] = 2\sigma L^2\{1 - \sin[\varphi(x)]\}.$$

Длина стороны  $OB$  в этом положении  $|OB| = L\sqrt{5} + x$ , и, в соответствии с теоремой косинусов,  $(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2 \cos[\varphi(x)] \Rightarrow \cos[\varphi(x)] \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L}x$ .

Отметим, что в этом выражении мы пренебрегли слагаемым порядка  $\frac{x^2}{L^2}$  (колебания малые).

В том же приближении  $\sin[\varphi(x)] \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1 - \frac{5x^2}{8L^2}$ . Значит,  $E(x) \approx \frac{5\sigma x^2}{4} = \frac{kx^2}{2}$ . Здесь введено обозначение  $k = \frac{5\sigma}{2}$ . Мы получили в точности такое же выражение, как для груза на пружине – малые колебания колечка будут происходить по гармоническому закону с

$$\text{периодом } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}.$$

Ответы:  $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$ .

**Полный балл за соответствующий пункт критериев ставится, если записана правильная формула или корректно приведён необходимый закон.**

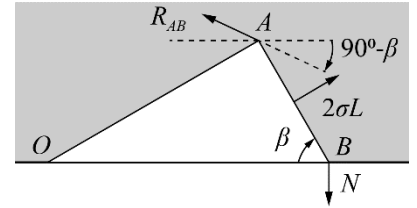
<b>11.1. Критерии оценивания (из 12 баллов)</b>	<b>баллы</b>
Указано, что в состоянии равновесия энергия плёнки минимальна	1
Указано, что в состоянии равновесия максимальна площадь треугольника OAB	1
Записано выражение для площади OAB (или для энергии системы*) через один геометрический параметр (угол, длина стороны OB и т.д.)	1
Определено положение равновесия системы (указано, что треугольник OAB прямоугольный, найдена длина $ OB  = L\sqrt{5}, \dots$ )	1
Найден угол $\alpha$ (численно или как значение обратной тригонометрической формулы)	1
** записано выражение для энергии системы при отклонении от положения равновесия (через любую однозначно определенную линейную или угловую координату).	2
Выражение для энергии приведено к квадратичному виду для малых колебаний	2
Указано на аналогию с колебаниями пружинного маятника (или используется иной корректный способ, позволяющий связать вид выражения для потенциальной энергии с периодом гармонических колебаний)	1
Получена ** формула для периода малых колебаний	2

\*в этом пункте за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) баллы не снижаются.

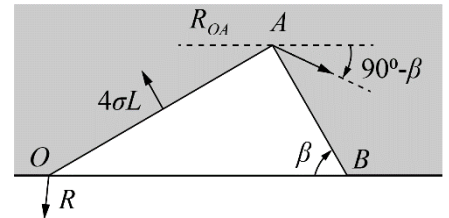
\*\*в этих пунктах за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) вместо 2 баллов ставится 1 балл.

**11.1. Возможное решение задачи. Способ 2 (статика и динамика).**

1) Рассмотрим равновесие стержня  $AB$ , на который действуют три силы. Это равнодействующая сил поверхностного натяжения, которая перпендикулярна стержню и приложена к его середине. Поскольку стержень невесом, из условия равенства моментов относительно колечка находим проекцию силы реакции шарнира на направление, перпендикулярное стержню:  $2\sigma L \frac{L}{2} - R_{AB\perp} L = 0 \Rightarrow R_{AB\perp} = \sigma L$ . Наконец, из условия баланса проекций сил на стержень, находим параллельную стержню составляющую силы реакции шарнира



$R_{AB\parallel} = N \sin(\beta) = \sigma L \operatorname{tg}(\beta)$ . Таким образом, величина этой силы  $R_{AB} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)}$ , и она направлена под углом  $(2\beta - 90^\circ)$  к стержню, и под углом  $(90^\circ - \beta)$  к горизонтали. Сила, действующая на шарнир  $A$  со стороны стержня  $AB$ , в соответствии с III законом Ньютона, равна по величине и противоположна по направлению найденной силе  $\vec{R}_{AB}$ , а также и силе, действующей на шарнир  $A$  со стороны стержня  $OA$  (шарнир  $A$  находится в равновесии под действием этих двух сил). И, конечно, сила  $\vec{R}_{OA}$ , действующая со стороны шарнира  $A$  на стержень  $OA$ , оказывается равна по величине и противоположна по направлению найденной нами силе:  $\vec{R}_{OA} = -\vec{R}_{AB}$ .



Теперь мы можем рассмотреть равновесие стержня  $OA$  под действием  $\vec{R}_{OA}$ , равнодействующей сил поверхностного натяжения и силы реакции шарнира  $O$ . Записав условие равновесия моментов относительно  $O$ , находим перпендикулярную стержню компоненту  $\vec{R}_{OA}$ :

$$4\sigma L \frac{L}{2} - R_{OA\perp} L = 0 \Rightarrow R_{OA\perp} = 2\sigma L.$$

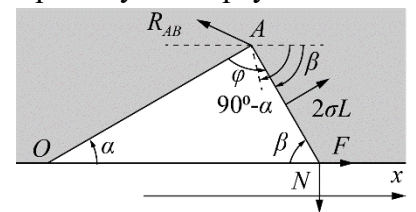
Но из найденного ранее получаем другое выражение для этой величины:

$$R_{OA\perp} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)} \cos(90^\circ - \beta) = \sigma L \cdot \operatorname{tg}(\beta).$$

Из сопоставления этих выражений видим, что в состоянии равновесия  $\operatorname{tg}(\beta) = 2$ . Из теоремы синусов  $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , и поэтому  $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$ .

Отметим, что из полученных углов ( $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$ ) видно, что третий угол в треугольнике  $OAB$  – прямой!

2) Рассмотрим теперь неравновесное положение колечка, в котором оно имеет координату  $x$ , отсчитываемую от положения равновесия (см. рис.). Далее будем считать, что обозначения всех углов относятся именно к смещённому положению колечка. Поскольку нам нужно описывать малые гармонические колебания, то все силы нужно вычислять с точностью до первого порядка по  $x/L$ . Например, длина  $OB$  в этом положении  $|OB| = L\sqrt{5} + x$ , и, в соответствии с теоремой косинусов,



$$(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2 \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L} x.$$

Соответственно, с этой точностью  $\sin(\varphi) \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1$ . По теореме синусов

## 11 класс

$$\sin(\beta) = \frac{2L}{L\sqrt{5}+x} \sin(\varphi) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5L}x \Rightarrow \cos(\beta) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5L}x.$$

Поскольку стержни и шарниры невесомые, то сумма приложенных к каждому из них сил и моментов сил равна нулю. Шайба в положении покоя просто передавала действующую на неё силу нормальной реакции спицы на стержень  $AB$ . Поскольку шайба массивная, и теперь движется с ускорением, то действующая с её стороны на стержень  $AB$  сила имеет компоненту  $F$  вдоль спицы. Повторим рассуждения о стержне  $AB$  для новой ситуации. Условие равновесия моментов сил относительно шарнира  $A$  даёт уравнение (1):

$$2\sigma L \frac{L}{2} - NL\cos(\beta) + FL\sin(\beta) = 0 \Rightarrow NL\cos(\beta) - FL\sin(\beta) = \sigma L.$$

Условие равновесия моментов относительно колечка прежде:  $2\sigma L \frac{L}{2} - R_{AB\perp}L = 0 \Rightarrow R_{AB\perp} = \sigma L$ . Условие баланса сил в проекции на стержень  $AB$  теперь превратилось в

$$R_{AB\parallel} = N\sin(\beta) + F\cos(\beta).$$

Условие равновесия моментов сил, действующих на стержень  $OA$  относительно  $O$ , тоже не изменилось:  $4\sigma L \frac{L}{2} - R_{OA\perp}L = 0 \Rightarrow R_{OA\perp} = 2\sigma L$ . С учётом  $\vec{R}_{OA} = -\vec{R}_{AB}$  можно вычислить эту компоненту через силы, действующие на  $AB$  (важно обратить внимание на то, что направление, перпендикулярное  $OA$ , составляет с горизонталью угол  $(90^\circ - \alpha)$ , а стержень  $AB$  – угол  $\beta$ ):

$$R_{OA\perp} = 2\sigma L = R_{AB\parallel} \cos(90^\circ - \alpha - \beta) + R_{AB\perp} \cos(180^\circ - \alpha - \beta).$$

С учётом того, что  $(180^\circ - \alpha - \beta = \varphi)$ , и выражений для сил, получаем уравнение (2):

$$N\sin(\beta) + F\cos(\beta) = \sigma L \frac{2 - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \approx \sigma L \left( 2 + \frac{\sqrt{5}}{2L}x \right).$$

Исключая из (1) и (2) силу  $N$ , и используя полученные выше приближённые формулы для углов, находим, что

$$F \approx \sigma L \left[ \left( 2 + \frac{\sqrt{5}}{2L}x \right) \cos(\beta) - \sin(\beta) \right] \approx \frac{5}{2}\sigma \cdot x.$$

Соответствующая компонента силы, действующей со стороны стержня  $AB$  на колечко, имеет противоположный знак. Таким образом, уравнение движения колечка при  $x \ll L$  имеет вид:

$$m\ddot{x} \approx -\frac{5}{2}\sigma \cdot x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega = \sqrt{\frac{5\sigma}{2m}}$ . Период

колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$ .

Ответы:  $\alpha = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$ .

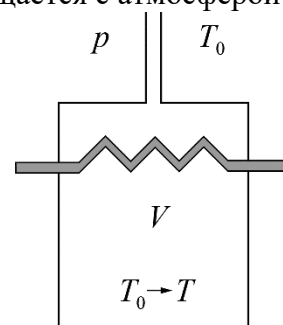
**Полный балл за соответствующий пункт критериев ставится если записана правильная формула или корректно приведён необходимый закон.**

<b>11.1. Критерии оценивания (из 12 баллов)</b>	<b>баллы</b>
Из условий равновесия * найдена $N$	0,5
Из условий равновесия * найдена $R_{AB\perp}$	0,5
Из условий равновесия * найдена $R_{AB\parallel}$	0,5
Из условий равновесия * найдена $R_{OA\perp}$	0,5
Из сравнения выражений для сил найден геометрический параметр, определяющий положение равновесия ( $\beta$ , $ OB $ , $\varphi$ , ...)	2
Найден угол $\alpha$ (численно или как значение обратной тригонометрической формулы)	2
Получены выражения для синусов и (или) косинусов <u>двух</u> углов в треугольнике OAB в первом порядке по $x/L$ (2×0,5 балла)	1
Записана * полная система уравнений для сил, позволяющая найти величину $F$	2
Уравнение движение шайбы приведено к уравнению гармонических колебаний	1
Получена ** формула для периода малых колебаний	2

\*в этих пунктах за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) баллы не снижаются.

\*\*в этих пунктах за потерю в выражении для энергии коэффициента 2 (связанного с наличием у плёнки двух поверхностей) вместо 2 баллов ставится 1 балл.

**11.2. Охлаждение.** Сосуд объёмом  $V$  с теплообменником внутри сообщается с атмосферой через тонкую длинную трубку. Исходно температура в нём  $T_0$  равна температуре атмосферного воздуха. По теплообменнику прокачивают охлаждающую жидкость до тех пор, пока температура воздуха во всём сосуде не уменьшится до  $T$  ( $T < T_0$ ). Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление  $P$ . Поток тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь. Внутренняя энергия воздуха



$U = (5/2)\nu RT$ , где  $\nu$  – число молей,  $T$  – температура, а  $R$  – газовая постоянная.

**11.2. Возможное решение.** При включении теплообменника температура вблизи него падает, остывший воздух сжимается, становится тяжелее и опускается вниз, а на его место входит более тёплый атмосферный воздух. При вхождении воздуха совершается положительная работа атмосферного давления.

Из уравнения состояния идеального газа находим, что число молей воздуха в сосуде увеличится от начального  $\nu_0 = PV/RT_0$  до  $\nu = PV/RT$  при конечной температуре  $T$ .

Если  $\Delta V$  объём атмосферного воздуха, вошедшего в сосуд, то начальный объём  $\nu$  молей воздуха при заданных внешних условиях:

$$V + \Delta V = \nu RT_0/P = VT_0/T, \text{ а } \Delta V = V(T_0/T - 1).$$

Тогда работа атмосферного давления при вхождении воздуха в сосуд:

$$A = P\Delta V = PV(T_0/T - 1).$$

По первому началу термодинамики работа идёт на изменение внутренней энергии и передачу теплоты (в данном случае теплообменнику):

$$A = \Delta U + Q \text{ или } Q = A - \Delta U.$$

Используем выражения для работы и изменения внутренней энергии:

$$Q = A - \Delta U = PV(T_0/T - 1) - (5/2)\nu R(T - T_0).$$

Используя выражение  $\nu = PV/RT$ , окончательно найдём искомое тепло

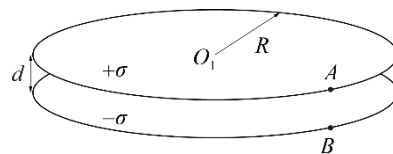
$$Q = (7/2)PV(T_0/T - 1).$$

№	11.2. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано, что в сосуд входит атмосферный воздух	1
2	Указано, что при этом совершается положительная работа внешнего давления	1
3	Найдено из уравнения состояния идеального газа число молей воздуха в сосуде при начальной и конечной температуре	2
4	Найден исходный объём воздуха, вошедшего в сосуд, $\Delta V = V(T_0/T - 1)$ .	2
5	Верно записано выражение для работы внешней среды $A = P\Delta V = PV(T_0/T - 1)$	2
6	Верно применено первое начало $A = \Delta U + Q$ или $Q = A - \Delta U$	1
7	Выражено изменение внутренней энергии и получено уравнение для $Q$	2
8	Получен верный ответ (если в п.6 выкладки доведены до ответа, то добавляется этот балл).	1

## Альтернативная версия критериев оценивания

№	11.2. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	При решении используется тот факт, что количество газа в сосуде увеличивается за счёт поступления газа снаружи	1
2	Указано или использован при решении тот факт, что внешняя среда совершает положительную работу над дополнительной порцией газа	2
3	Верно записано выражение для количества газа, дополнительно поступающего в сосуд. (Дополнительное количество может быть выражено в молях, через массу, через объём газа при внешних условиях.)	1
4	Количество газа, дополнительно поступившего в сосуд (п.3), пересчитано в его объём при внешних условиях $\Delta V = V(T_0/T - 1)$ (Если в п.3 дополнительное количество сразу выражено через объём, ставятся баллы за оба пункта)	2
5	Верно записано выражение для работы внешней среды $A = P\Delta V = PV(T_0/T - 1)$	2
6	Верно записано первое начало термодинамики применительно к условию задачи	2
7	Получен верный ответ	2

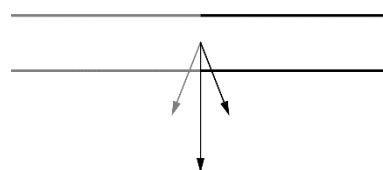
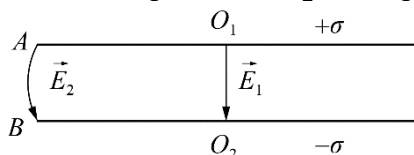
**11.3. Плоский конденсатор.** Две круглые непроводящие пластины радиуса  $R$  располагаются параллельно на малом расстоянии  $d \ll R$  друг от друга, образуя плоский конденсатор. Пластины заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры пластин. Точки  $A$  и  $B$  находятся на краях пластин. Отрезки  $O_1O_2$  и  $AB$  перпендикулярны плоскостям пластин. Найдите разности потенциалов между парами точек: 1)  $O_1$  и  $O_2$ ; 2)  $A$  и  $B$ ; 3)  $O_1$  и  $A$ .



**11.3. Решение задачи.** 1. Напряжённость электрического поля в зазоре между центрами пластин соответствует напряжённости между двумя бесконечными плоскостями  $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Тогда разность потенциалов между центрами пластин  $\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ .

2. Рассмотрим поле  $\vec{E}_2$  в зазоре на границе пластин.



Так как зазор мал, пластины можно считать полуплоскостями. Для нахождения поля  $\vec{E}_2$  между ними мысленно добавим ещё две полуплоскости. Они будут создавать напряжённость поля, имеющую такую же нормальную (т. е. перпендикулярную плоскостям) компоненту, а суммарная напряжённость поля от всех четырёх полуплоскостей будет равна  $E_1$ . Таким образом получаем, что нормальная компонента напряжённости электрического поля двух полуплоскостей равна половине  $E_1$ , или

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Приведённое рассуждение применимо для любой точки отрезка  $AB$ , отсюда разность потенциалов между краями пластин:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}.$$

3. Из потенциальности электрического поля следует:

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A + \varphi_{O_2} - \varphi_B + \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}$$

Из соображений симметрии  $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_{O_2}$ . Комбинируя эти выражения, получаем

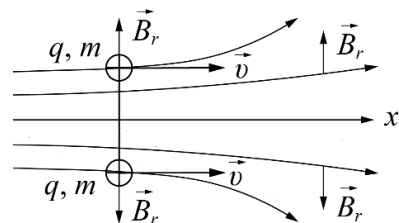
$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2} \left( (\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}) - (\varphi_A - \varphi_B) \right) = \frac{\sigma d}{4\epsilon_0}.$$



Полный балл за соответствующий пункт критериев ставится, если записана правильная формула или корректно приведён необходимый закон.

№	11.3. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Найдена напряжённость поля $E_1$	1
2	Найдена разность потенциалов между точками $O_1$ и $O_2$	1
3	Указано, что кривизну пластин можно не учитывать, или что пластины можно заменить полуплоскостями	3
4	Найдена нормальная составляющая напряжённости поля на отрезке $AB$	2
5	Найдена разность потенциалов между точками $A$ и $B$	1
6	Использовано соображение суммарной нулевой разности потенциалов по контуру $O_1ABO_2O_1$	2
7	Указано, что разности потенциалов между $A$ и $O_1$ и между $O_2$ и $B$ равны	1
8	Найдена разность потенциалов между точками $O_1$ и $A$	1

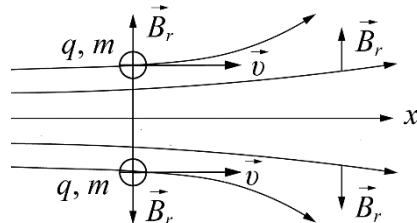
**11.4. Гантель в магнитном поле.** В аксиально-симметричном магнитном поле находится гантель – лёгкий непроводящий стержень с заряженными шариками на концах. Массы и заряды шариков одинаковы и равны  $m$  и  $q$ . Гантель перпендикулярна оси симметрии (оси  $x$ ), а её центр находится на этой оси (см. рис.). Проекция магнитного поля на радиальное (перпендикулярное оси) направление на расстоянии равном радиусу гантели везде одинакова и равна  $B_r$ . Осовая компонента поля изменяется вдоль оси. В момент времени  $t_0$  гантели сообщают скорость  $v_0$  вдоль оси  $x$ . Силу тяжести не учитывайте.



- 1) На какое наибольшее расстояние  $L_{\max}$  от начального положения удаляется центр гантели?
- 2) Чему равна максимальная окружная (перпендикулярная оси симметрии) скорость вращения шариков гантели в процессе движения?
- 3) Через какое время после  $t_0$  угловая скорость вращения гантели окажется наибольшей?

**11.4. Возможное решение.** Вызываемые осевой проекцией магнитного поля силы направлены вдоль стержня, равны по величине и противоположно направлены и не сказываются на движении гантели.

В начальный момент силы, связанные с радиальной проекцией магнитного поля, оказываются тангенциальными, то есть перпендикулярными оси и радиальному направлению. Это приводит к росту угловой скорости вращения вокруг оси симметрии, но при этом нет сил, смещающих центр гантели поперёк оси или вызывающих поворот плоскости вращения. В самом деле, при скорости  $v$  шариков вдоль оси и окружной скорости  $u$  возникающие из-за радиальной проекции магнитного поля  $B_r$  силы перпендикулярны скорости шариков и имеют осевую составляющую  $F_x = -quB_r$  и тангенциальную (окружную)  $F_t = qvB_r$ . Соответственно



$$m \frac{dv}{dt} = -quB_r; \quad m \frac{du}{dt} = qvB_r.$$

Пока  $v$  не уменьшится до нуля, окружная и угловая скорости растут. Поскольку работа магнитной силы равна нулю, то кинетическая энергия остаётся неизменной и максимальная окружная скорость  $u_{\max} = v_0$ .

При смещении центра гантели на  $x$  от начальной точки

$$m \frac{du}{dt} = qvB_r = qB_r \frac{dx}{dt},$$

откуда  $mu = qB_r x$ . Для максимального смещения  $L_{\max}$  имеем:

$$mu_{\max} = qB_r L_{\max} \quad \text{и} \quad L_{\max} = \frac{mv_0}{qB_r}.$$

После подстановки  $u = \frac{qB_r x}{m}$  в выражение  $m \frac{dv}{dt} = -quB_r$  получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x$$

LVI Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап.

Теоретический тур. 22 января 2022 г.

11 класс

с круговой частотой  $\omega = \frac{qB_r}{m}$  и периодом  $T = \frac{2\pi m}{qB_r}$ . Первый раз от момента начала движения максимальная скорость вращения будет достигнута через четверть периода  $t_1 = \frac{\pi m}{2qB_r}$ . Затем максимальное значение скорости вращения будет достигаться через каждые полпериода. Таким образом, для моментов времени, в которые достигается максимальная скорость вращения, справедлива формула

$$t_n = \frac{\pi m}{2qB_r} (2n - 1),$$

где  $n$  - натуральное число.

№	11.4. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано, что от осевой компоненты магнитного поля движение не зависит	1
2	Записаны выражения для осевой и тангенциальной компонент магнитной силы (0,5 балла за каждую компоненту)	1
3	Верно записан 2-й закон Ньютона для этих компонент (0,5 балла за каждую компоненту)	1
4	Указано, что кинетическая энергия и модуль полной скорости при движении в магнитном поле не меняются, определена максимальная окружная скорость	1
5	Установлена связь окружной скорости со смещением вдоль оси симметрии	1
6	Найдено максимальное смещение от начальной точки	2
7	Получено уравнение гармонических колебаний	2
8	Получено выражение для периода или частоты колебаний	1
9	Определены моменты времени достижения максимума угловой скорости *	2

\*Если определено только значение времени  $t_1$  то за этот пункт ставится один балл.

**11.5. Круг Снелла.** Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой были изображены тонкая собирающая линза, круг и его изображение в линзе. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны лишь круг и его изображение, но известно, что круг целиком располагался в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы, и что круг и его изображение располагались по разные стороны от плоскости линзы.

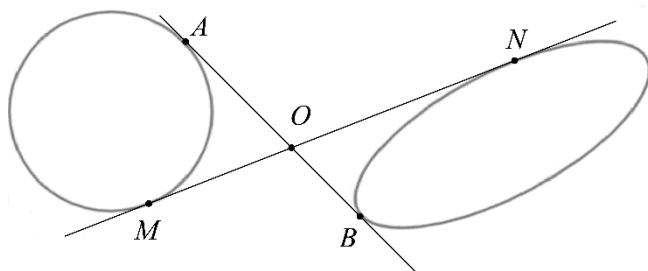
Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

- 1) оптического центра  $O$  линзы;
- 2) плоскости линзы;
- 3) фокусов  $F_1$  и  $F_2$  линзы.

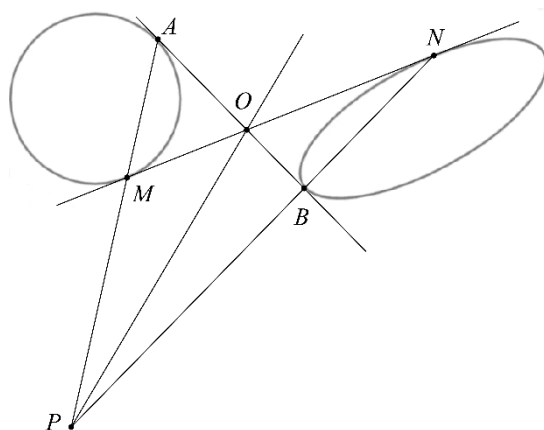


**11.5. Возможное решение.** Поскольку плоскость линзы находится между источником и его изображением, то изображение является действительным, причём фокальные плоскости линзы также находятся между ними – в противном случае изображение оказалось бы «разорванным» на действительную и мнимую часть.

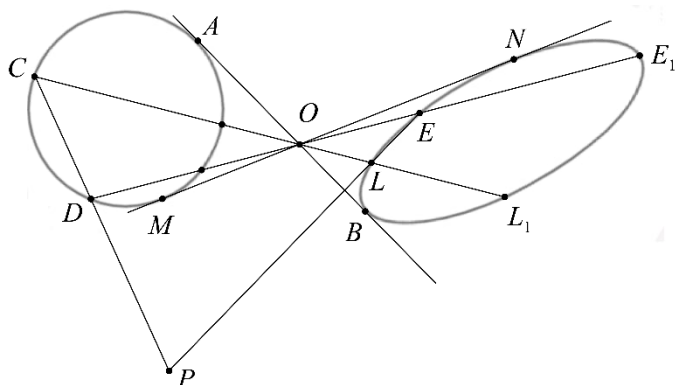
Точечный источник и его изображение в линзе лежат на прямой, проходящей через оптический центр  $O$ . Если прямая, проходящая через оптический центр, касается круга, то на этой прямой находится изображение лишь одной его точки. Это означает, что данная прямая касается и изображения круга. Из этого следует, что оптический центр линзы  $O$  находится в точке пересечения общих внутренних касательных  $AB$  и  $MN$  к кругу и его изображению.



Рассмотрим луч, проходящий через точки  $A$  и  $M$ . После преломления в линзе он проходит через точки пересечения касательных к изображению круга  $B$  и  $N$ . Поэтому в точке пересечения линий, проходящих через точки круга и его изображения, находится точка  $P$ , принадлежащая плоскости линзы. Проведя прямую  $OP$ , найдём положение плоскости линзы.

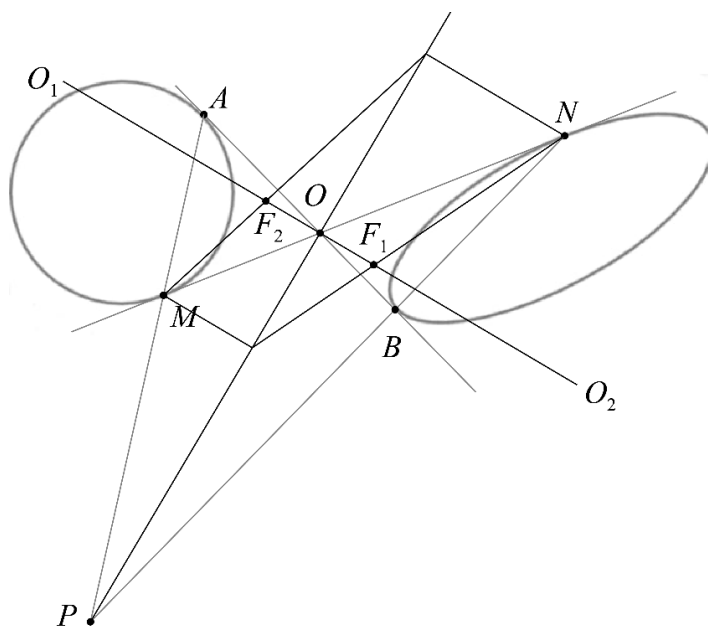


Отметим, что для построения плоскости линзы можно провести через  $O$  любые две прямые, пересекающие круг и его изображение (например,  $CL$  и  $DE$ ), выбрать на этих прямых точки, принадлежащие кругу, используя найденный центр линзы определить изображения этих точек ( $L$  и  $E$ ), а затем провести через эти пары точек прямые до пересечения, чтобы определить положение точки в плоскости линзы.



Однако при таком подходе важно не перепутать изображения этих точек с другими точками пересечения прямых  $CO$ ,  $DO$  с линией изображения («ложные точки»  $E_1$  и  $L_1$ ). Для правильного выбора достаточно заметить, что для действительных изображений в собирающей линзе увеличение расстояние от предмета до линзы приводит к уменьшению расстояния от линзы до изображения. Поэтому изображениям «дальних» от  $O$  точек пересечения круга с прямыми ( $C$  и  $D$ ) отвечают «ближние» к  $O$  точки пересечения этих прямых с эллипсом-изображением.

Закачивая наше построение, определим главную оптическую ось линзы  $O_1O_2$  как прямую, проходящую через точку  $O$  перпендикулярно  $OP$ . Наконец, для определения положения фокусов линзы рассмотрим лучи, идущие параллельно главной оптической оси через точку  $M$  и её изображение  $N$ . По другую сторону от линзы эти лучи проходят через точки  $N$  и  $M$  соответственно, пересекая оптическую ось в точках фокусов  $F_1$  и  $F_2$ . Как видно, фокальные плоскости действительно оказались между кругом и его изображением.



№	11.5. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано или используется в ходе решения, что оптический центр линзы $O$ находится в точке пересечения внутренних касательных к кругу и его изображению.	3,0
2	Предыдущее утверждение обосновано.	1,5
3	Правильно восстановлен построением оптический центр линзы $O$ .	0,5
4	Указано или используется в ходе решения, что точка пересечения прямой, проходящей через два точечных источника и прямой, проходящей через их изображения, принадлежит плоскости линзы.	2,5
5	Правильно восстановлена построением плоскость линзы.	1,5
6	Указано или используется в ходе решения, что главная оптическая ось линзы – перпендикуляр к плоскости линзы, проходящий через оптический центр.	0,5
7	Правильно восстановлена построением главная оптическая ось линзы.	0,5
8	Правильно восстановлены построением фокусы линзы $F_1$ и $F_2$ (по 1 баллу за каждый).	2,0

**Примечание.** Для определения точки, принадлежащей плоскости линзы, может быть использован другой луч, пересекающий любые две точки круга, отличные от точек  $A$  и  $M$ . Однако, как указывалось в решении, в этом случае возможна ошибка, связанная с неверным установлением соответствия между этими точками и их изображениями. В этом случае баллы за пункты 5, 7 и 8 не ставятся!