МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2021–2022 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 11 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.
2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.
3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.
4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.
5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.
6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

11.1. Учитель литературы решил выяснить у учеников из 11«А» класса, сколько человек из их класса отсутствуют. Он получил такие ответы: Петр: «Больше одного». Виктор: «Больше двух». Татьяна: «Больше трёх». Чарльз: «Больше четырёх». Полина: «Меньше четырёх». Шурик: «Меньше трёх». Сколько человек в 11«А» классе отсутствует на самом деле, если ровно три ученика сказали правду? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

11.2. На доске записано 10 действительных чисел; сумма любых трёх из них больше семи. Может ли случиться так, что

а) сумма любых семи из них меньше шестнадцати;

б) сумма любых пяти из них меньше двенадцати?

Ответы обоснуйте.

11.3. На ребре AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины $3\sqrt{2}$ отмечена точка K. В пространстве отмечена такая точка T, что $TB = 7$ и $TC = \sqrt{67}$. Какое наименьшее и наибольшее значение может иметь длина отрезка TK? Ответ обоснуйте.

11.4. Для некоторых функций $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет место тождество

$$f(x)g(y) = axy + bx + cy + 1,$$

где a, b, c — константы, а x и y — любые действительные числа. Докажите, что $a = bc$.

11.5. Дан острый угол O. На одной его стороне берём точку A_1 и опускаем перпендикуляр A_1A_2 на другую сторону угла. Затем из точки A_2 опускаем перпендикуляр на OA_1, получаем точку A_3 и т. д. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок, равный длине бесконечной ломаной $L = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots$? Приведите построение и обоснуйте, что в его результате получится отрезок требуемой длины.

11.6. В соревновании, проходящем в виде однокругового турнира, каждая команда играет с каждой ровно один раз. По окончании однокругового турнира по футболу среди 16 команд оказалось, что команда «Джокер» выиграла у всех тех команд, которые в итоговой таблице находятся выше «Джокера» (по набранным очкам), но проиграла всем тем, которые находятся ниже. При этом команд, которые набрали столько же очков, что и «Джокер», не нашлось. Какое самое высокое место в турнире мог занять «Джокер»? Ответ обоснуйте. (Известно, что в футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)