

Задача 1. Быстрая река

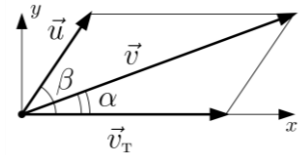
Пловец хочет по прямой переплыть реку, скорость течения которой в два раза больше скорости пловца относительно воды. Каким должен быть угол между траекторией пловца и направлением течения, если пловец хочет как можно скорее попасть на соседний берег? Каков максимально возможный угол между траекторией пловца и течением?

Решение

Обозначим вектор собственной скорости пловца как \vec{u} , скорости течения \vec{v}_T . По условию $v_T = 2u$. По закону сложения скоростей скорость пловца относительно земли составит

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_T.$$

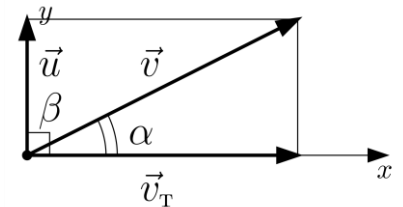
Введём систему координат, как показано на рисунке. Угол α между векторами \vec{v} и \vec{v}_T — искомый угол между траекторией пловца и направлением течения, а угол β — угол между векторами \vec{u} и \vec{v}_T . Скорость пловца относительно земли имеет компоненты $v_x = u \cos \beta + v_T$, $v_y = u \sin \beta$.



Пусть ширина реки равна L . Тогда время, за которое он достигнет другого берега,

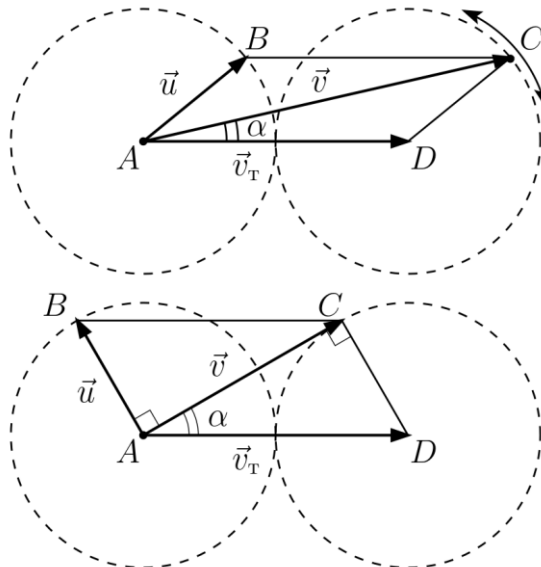
$$t = \frac{L}{v_y} = \frac{L}{u \sin \beta}.$$

Очевидно, это время будет наименьшим, если $\sin \beta$ принимает наибольшее возможное значение, т.е. $\beta = 90^\circ$,



собственная

скорость пловца \vec{u} должна быть перпендикулярна скорости течения. В этом случае $\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{v_T} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ$.



Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим, как будет меняться угол α при различных направлениях вектора скорости пловца \vec{u} . Угол β может меняться от 0 до 180° , конец вектора при этом будет описывать половину окружности. Если выполнить сложение векторов \vec{u} и \vec{v}_T по правилу параллелограмма, то вершина C

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22

Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс, вариант 111

параллелограмма ABCD также будет двигаться по окружности вокруг точки D, а искомый угол α — угол между диагональю AC параллелограмма и его длинной стороной. Очевидно, что этот угол примет наибольшее значение, если диагональ AC будет отрезком на касательной к окружности. В этом случае угол $\angle ACD = \angle BAC = 90^\circ$.

Найдём угол α из прямоугольного треугольника ACD:

$$\sin \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{u}{v_T} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2}, \alpha = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

Альтернативное решение второй части задачи

Участники, знакомые с понятием производной, могут решить данную задачу, воспользовавшись процедурой нахождения экстремума функции. Вернёмся к координатной системе, введенной в первой части задачи. Зная компоненты вектора \vec{v} , найдём

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{u \sin \beta}{u \cos \beta + v_T} = \frac{u \sin \beta}{u \cos \beta + 2u} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta + 2}.$$

Поскольку при $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ тангенс угла α монотонно возрастает, достаточно найти производную функции $\operatorname{tg} \alpha$ по углу β и приравнять эту производную к нулю.

$$(\operatorname{tg} \alpha)'_{\beta} = \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta + 2} \right)' = \frac{\cos \beta (\cos \beta + 2) + \sin^2 \beta}{(\cos \beta + 2)^2} = \frac{1 + 2 \cos \beta}{(\cos \beta + 2)^2} = 0.$$

$$\cos \beta = -\frac{1}{2}.$$

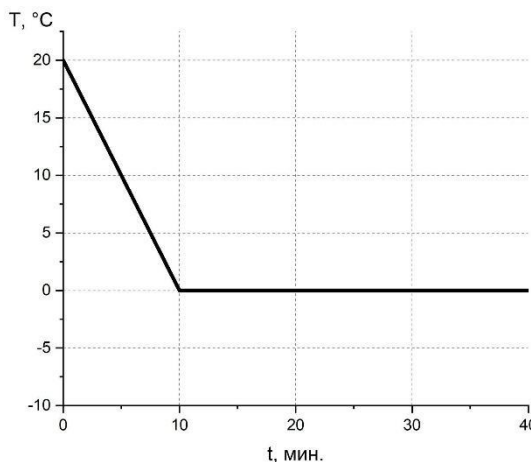
Учитывая, что $0 \leq \beta \leq 180^\circ$, получаем $\beta = 120^\circ$.

Находим искомый угол α :

$$\alpha = \arctan \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ + 2} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2(-0,5 + 2)} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ.$$

Задача 2: Обратный процесс

Гриша тестирует новую охлаждающую установку. Для этого он поместил внутрь камеры маленький тонкостенный стаканчик с водой и начал измерять температуру внутри стаканчика от времени. Полученные значения он записывал в таблицу, но при создании графика он обнаружил, что потерял лист с частью данных. Помогите Грише



восполнить потерянные данные по имеющемуся графику: определите момент времени, когда температура станет отрицательной. Найдите максимальный по модулю темп охлаждения $\frac{\Delta T}{\Delta t}$. Теплоёмкость льда $2.7 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$ и воды $4.2 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$, удельная теплота плавления льда 0.33 МДж/кг .

Решение

а) В этом процессе мы имеем 3 стадии:

- 1) охлаждение жидкой воды
- 2) кристаллизация (отвердевание) воды в лёд
- 3) охлаждение льда

При охлаждении воды видно, что наблюдается линейное падение температуры, что свидетельствует о постоянстве мощности охлаждения на участке от $+20^\circ\text{C}$ до 0°C . Значит, мощность охлаждения на всех участках процесса будет постоянной и равной мощности охлаждения воды.

$$N_B = N_K = N_L$$

По определению мощность это теплота за единицу времени, поэтому

$$N_B = \frac{Q_B}{t_B} = \frac{c_B m (T_2 - T_1)}{t_B} = -\frac{c_B m \Delta T_B}{t_B} \text{ мощность охлаждения воды;}$$

$$N_K = \frac{Q_K}{t_K} = -\frac{\lambda m}{t_K} \text{ мощность кристаллизации льда;}$$

$$N_L = \frac{Q_L}{t_L} = \frac{c_L m (T_4 - T_3)}{t_L} = -\frac{c_L m \Delta T_L}{t_L} \text{ мощность охлаждения льда;}$$

Приравнявая, сократим массу, т.к. она постоянна

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс, вариант 111

$$\frac{c_B \Delta T_B}{t_B} = \frac{\lambda}{t_K} = \frac{c_L \Delta T_L}{t_L} \quad (1)$$

Отрезок, идущий вдоль $T=0^\circ\text{C}$, определяется временем кристаллизации льда, которое находим из (1):

$$t_K = \frac{\lambda}{c_B \Delta T_B} t_B = \frac{330 \text{ кДж/кг}}{4.2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К} \cdot 20^\circ\text{C}} \cdot 10 \text{ мин} \approx 39 \text{ мин}$$

Значит, прямая начнет опускаться ниже $T=0^\circ\text{C}$ в момент времени:

$$t_{K+B} = t_B + t_K = 10 + 39 = 49 \text{ мин}$$

б) Из графика видно, что для охлаждения воды на $\Delta T=20^\circ\text{C}$ требуется 10 минут, зависимость линейная. Тогда по модулю $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 2^\circ\text{C/мин}$

На участке кристаллизации изменения температуры не происходит, $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0$.

Для участка охлаждения льда из (1) находим

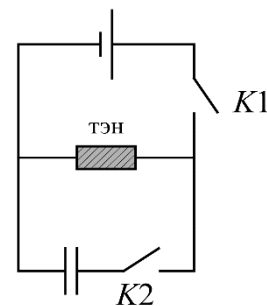
$$\frac{\Delta T_L}{\Delta t_L} = \frac{c_B \Delta T_B}{c_L \Delta t_B} = \frac{4.2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К} \cdot 20^\circ\text{C}}{2.7 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К} \cdot 10 \text{ мин}} \approx 3.11^\circ\text{C/мин}$$

Сравнив темп охлаждения трёх участков, определяем, что максимальный темп охлаждения $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 3.11^\circ\text{C/мин}$

Задача 3: Ёмкий тэн

Схема состоит из двух ключей, идеального источника ЭДС, конденсатора и тэна (нагревательного элемента) с сопротивлением $R = 2 \text{ Ом}$, который погружен в емкость с теплоизолированными стенками.

Перед каждым экспериментом в емкость наливают одинаковое количество жидкости температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$, конденсатор исходно разряжен. Сначала оба ключа разомкнуты. В первом эксперименте ключ



К1 замкнули на $t_1 = 10$ секунд, температура жидкости после этого составила $T_1 = 40^\circ\text{C}$. Во втором эксперименте сначала замкнули К2, а затем вновь на $t_1 = 10$ секунд ключ К1, в этом случае жидкость нагрелась до $T_2 = 41^\circ\text{C}$. Определите емкость конденсатора. До какой температуры нагреется жидкость в третьем эксперименте, когда при замкнутом ключе К2 исследователи замкнут ключ К1 уже на $t_2 = 20$ секунд?

Решение

Рассмотрим первый эксперимент. Мы не знаем напряжение источника ЭДС (U), а также массу (m) и теплоемкость (c) налитой жидкости. Запишем уравнение теплового баланса и закон Джоуля — Ленца:

$$\frac{U^2 t_1}{R} = c \cdot m \cdot (T_1 - T_0) \quad (1)$$

Пользуясь тем фактом, что ЭДС источника, а также теплоёмкость жидкости и ее масса не меняются от эксперимента к эксперименту, выразим их через известные нам величины:

$$\frac{c \cdot m}{U^2} = \frac{t_1}{R \cdot (T_1 - T_0)}$$

Во втором эксперименте, когда ключ К2 замкнут и параллельно тэну подключен конденсатор с неизвестной электроёмкостью C_k , на тэне после отключения ключом К1 источника ЭДС будет дополнительное тепловыделение от энергии, запасенной в конденсаторе. Запишем уравнение теплового баланса для этого случая:

$$\frac{U^2 t_1}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_0) = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1) + c \cdot m \cdot (T_1 - T_0) \quad (2)$$

Если вычесть из уравнения (2) уравнение (1), то получится:

$$\frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

Определим емкость конденсатора из данного выражения:

$$C_k = \frac{2c \cdot m}{U^2} (T_2 - T_1) = \frac{2t_1}{R \cdot (T_1 - T_0)} (T_2 - T_1)$$

Подставим числа и получим:

$$C_k = \frac{20}{2 \cdot (40 - 20)} (41 - 40) = 0.5 \text{ Ф}$$

Вычислим итоговую температуру для третьего эксперимента, когда тэн с конденсатором были включены $t_2 = 20$ секунд. Запишем уравнение теплового баланса:

$$\frac{U^2 t_2}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T - T_0)$$

Откуда:

$$T = T_0 + \frac{U^2 \cdot t_2}{c \cdot m \cdot R} + \frac{C_k U^2}{2c \cdot m} = T_0 + \frac{t_2}{t_1} (T_1 - T_0) + T_2 - T_1$$

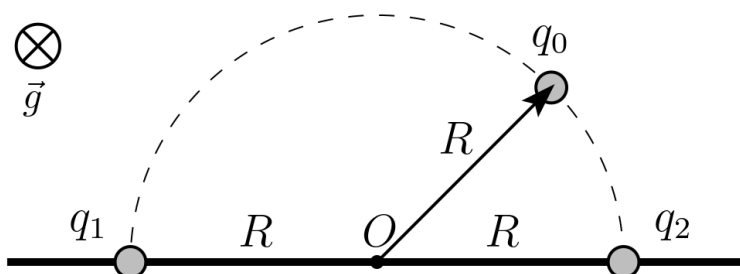
Подставим числа и получим:

$$T = 20 + 20 \cdot 2 + 41 - 40 = 61^\circ\text{C}$$

Второй вариант решения для третьего эксперимента: нагрев длительностью $t_1 = 10$ секунд без конденсатора приводит к разнице температур в 20°C , а следовательно, при $t_2 = 20$ секунд разница температур составит 40°C . Энергия полностью заряженного конденсатора приводит к дополнительной разнице температур в 1°C и одинакова, как для t_1 , так и для t_2 . Просуммировав, получим разницу температур в 41°C , а следовательно температура жидкости будет 61°C .

Задача 4. Электросчётчик

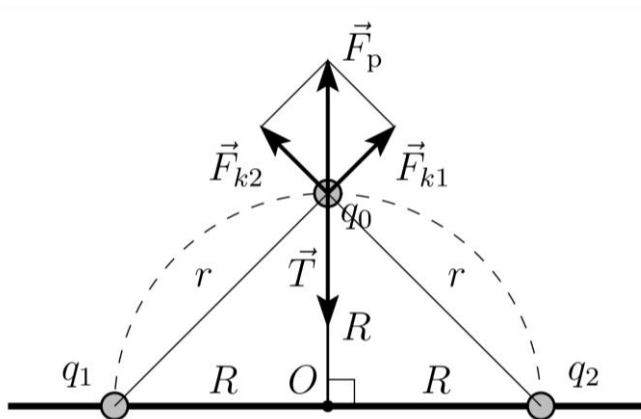
Петя разработал следующее устройство для измерения отношений электрических зарядов. Два небольших заряженных шарика с одноимёнными зарядами q_1 и q_2



закреплены на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии $2R$ друг от друга, а третий заряд q_0 , лежащий на этой же поверхности, на нити длиной R прикреплен к точке O — используется как стрелка. При каком отношении зарядов шариков q_1/q_2 стрелка была под прямым углом к линии, соединяющей заряды? Под углом 45° , как показано на рисунке? Массами шариков можно пренебречь.

Решение

Рассмотрим первый случай. Чтобы нить была натянута, заряд q_0 должен иметь такой же знак, как и q_1 и q_2 . Покажем в этом случае силы, действующие на заряд q_0 .



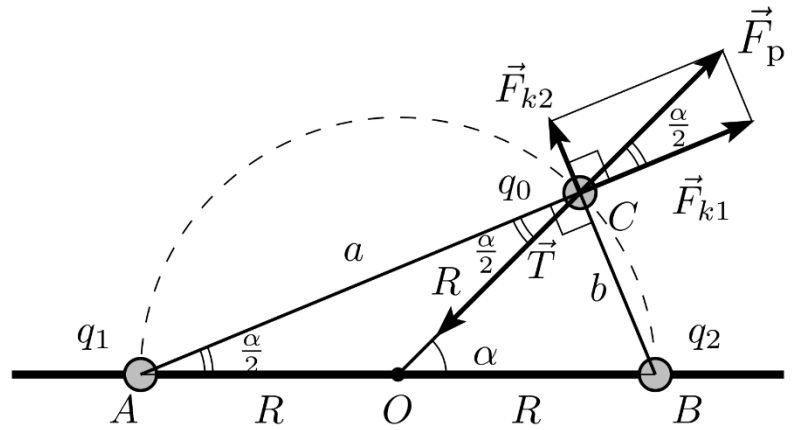
Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс, вариант 111

Равнодействующая F_p сил Кулона F_{k1} и F_{k2} должна быть направлена противоположно силе натяжения нити T , чтобы уравновесить её. Очевидно, в этом случае силы Кулона должны быть равны друг другу:

$$F_{k1} = F_{k2} = \frac{kq_1q_0}{r^2} = \frac{kq_2q_0}{r^2}.$$

В результате получаем, что в первом случае заряды равны друг другу: $q_1/q_2 = 1$.

Рассмотрим случай, когда нить находится под произвольным углом α к линии, соединяющей заряды q_1 и q_2 . Отметим, что точечные заряды q_0 , q_1 и q_2 образуют прямоугольный треугольник ABC , как вписанный в окружность треугольник, опирающийся на диаметр.



Силы Кулона F_{k1} и F_{k2} также будут перпендикулярны друг другу. Обозначим угол $\angle BOC = \alpha = 45^\circ$. Тогда вписанный угол $\angle BAC = \alpha/2$. Пользуясь свойствами равнобедренных треугольников AOC и BOC , отметим углы, равные $\alpha/2$, как показано на рисунке. Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F_{k2}}{F_{k1}}.$$

По закону Кулона

$$F_{k1} = \frac{kq_1q_0}{a^2}, \quad F_{k2} = \frac{kq_2q_0}{b^2}.$$

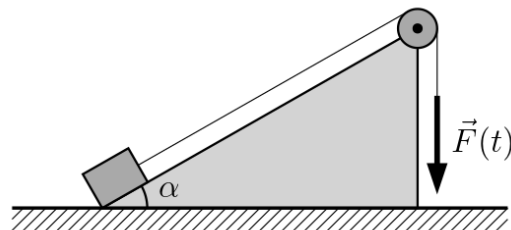
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{q_2 a^2}{q_1 b^2}.$$

Из прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = 2R$ найдём его катеты $a = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$, $b = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$. В итоге получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{q_2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{q_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{q_2}{q_1} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} = \left(\operatorname{ctg} \frac{45^\circ}{2} \right)^3 \approx 14.$$

Задача 5. Подъёмник

В рамках разработки нового двигателя для грузового подъёмника провели следующий эксперимент. Некоторый груз поднимали по наклонной плоскости, закреплённой под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, как показано на рисунке. Модуль силы \vec{F} , с которой поднимали груз, зависел от времени по закону $F(t) = kt$, где коэффициент $k = 10$ Н/с. В таблице приведена измеренная зависимость ускорения груза от времени. Определите, в какой момент t_0 груз начал своё движение. Чему равнялись масса груза m и коэффициент трения μ между грузом и плоскостью?



$t, \text{с}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$a, \text{м/с}^2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,25	3,75

Считайте трос нерастяжимым и невесомым, блок также невесомым, трение в блоке отсутствует, ускорение свободного падения можно принять за 10 м/с^2 .

Решение

Покажем силы, действующие на груз, введём систему координат и запишем основное уравнение динамики для поднимающегося груза.

$$ma = -mg \sin \alpha + T - F_{\text{тр}},$$

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

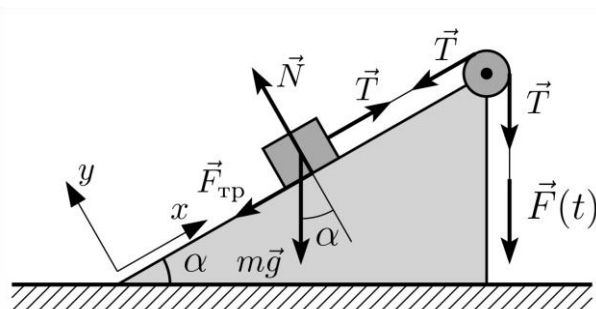
Из условия невесомости троса и блока и отсутствия сил трения в блоке следует равенство силы натяжения троса и приложенной силы: $T = F(t) = kt$. Тогда

$$ma = -mg \sin \alpha + kt - F_{\text{тр}}.$$

В этом уравнении в качестве силы трения может выступать сила трения покоя, и в этом случае груз не будет смещаться, его ускорение будет равно нулю: $a = 0$. Либо $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ — сила трения скольжения, груз поднимается, и тогда уравнение движения груза примет вид

$$ma = -mg \sin \alpha + kt - \mu mg \cos \alpha.$$

В этом случае ускорение груза можно найти как

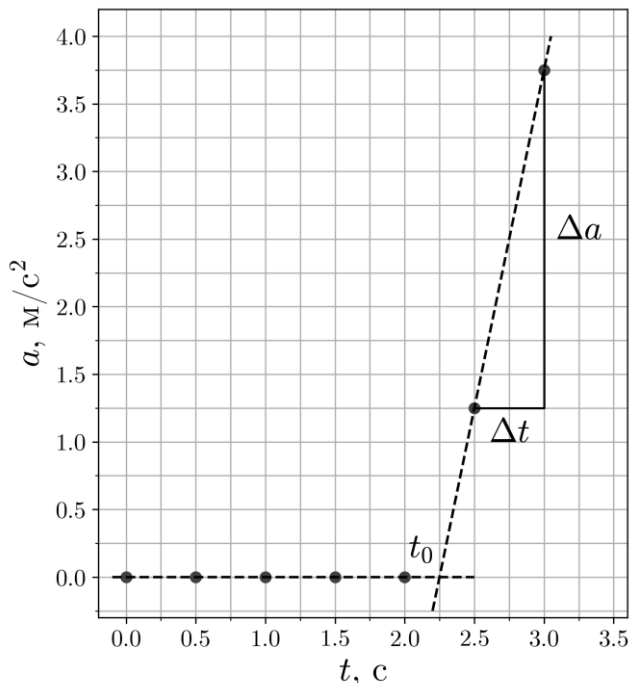


Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс, вариант 111

$$a = \frac{k}{m}t - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Во всяком случае, ускорение груза либо равно нулю, либо линейно зависит от времени. Чтобы найти момент начала движения t_0 достаточно нанести все точки из таблицы на график, провести через них две прямые линии, как показано на рисунке, и найти их точку пересечения. Получаем $t_0 = 2,25$ с.

Для нахождения массы груза рассмотрим участок линейного возрастания ускорения. Угловым коэффициентом функции $a(t)$ на этом участке равен $\frac{k}{m}$, для его нахождения можно найти отношение изменения ускорения Δa к величине соответствующего промежутка времени Δt , например, между последними двумя точками из таблицы.



$$\frac{k}{m} = \frac{\Delta a}{\Delta t}.$$

$$m = \frac{k\Delta t}{\Delta a} = \frac{10 \cdot (3 - 2,5)}{3,75 - 1,25} = 2 \text{ кг.}$$

Коэффициент трения можно из найденного значения момента начала движения груза. В момент начала движения ускорение груза равно нулю:

$$0 = \frac{k}{m}t_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\frac{kt_0}{mg} - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Тогда получаем

$$\mu = \frac{\frac{10 \cdot 2,25}{2 \cdot 10} - \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \approx 0,72.$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс, вариант 111

Также возможен полностью аналитический вариант решения задачи. Для этого рассмотрим две последние точки в таблице. Обозначим соответствующие моменты времени за t_1, t_2 , ускорения груза — a_1, a_2 . Получим систему уравнений

$$a_1 = \frac{k}{m}t_1 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$
$$a_2 = \frac{k}{m}t_2 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Решая эту систему, получим выражения для массы груза:

$$m = \frac{k(t_2 - t_1)}{a_2 - a_1} = 2 \text{ кг},$$

и для коэффициента трения:

$$\mu = \frac{a_1 t_2 - a_2 t_1 + g \sin \alpha (t_2 - t_1)}{g(t_1 - t_2) \cos \alpha} \approx 0,72.$$

Получив эти значения, можно найти t_0 :

$$0 = \frac{k}{m}t_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad t_0 = \frac{mg}{k}(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 2,25 \text{ с}.$$