

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2021–2022 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

10.1. Различные положительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$xyz = 1 \text{ и } x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Найдите среднее из них. Ответ обоснуйте.

10.2. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , при этом $O_1O_2 > O_1A > O_2B$. Пусть P и Q — точки пересечения окружности, описанной около треугольника O_1AO_2 с первой и второй окружностями соответственно. Докажите, что отрезки O_1Q и O_2P пересекаются в точке B .

10.3. Группа детского сада в количестве 25 детей вернулась с прогулки. Для просушки дети выложили на батарею в ряд все свои 50 варежек. Воспитательница группы заметила, что варежки каждого ребёнка лежат не рядом. Более того, оказалось, что между варежками любого ребёнка лежит простое число варежек других детей. Докажите, что найдётся ребёнок, между варежками которого лежат ровно две другие варежки.

10.4. График квадратного трёхчлена

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + bx + c$$

пересекает положительную полуось оси Oy в точке M , а положительную полуось оси Ox — в точках K и L (точка L расположена правее точки K). Оказалось, что $\angle LKM = 120^\circ$, а $KL = KM$. Найдите корни данного трёхчлена.

10.5. Профессор Потапов меняет шило на мыло, академик Агатов 4 мыла на 1 шило, а доцент Долматов 1 мыло на 5 шильев (но не наоборот). После нескольких обменов у студента Сидорова оказалось столько же шильев и мыла, сколько было в начале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 26.

10.6. В равностороннем треугольнике ABC выбрана точка P таким образом, что $AP = 10$, $BP = 8$, $CP = 6$. Найдите площадь этого треугольника.