

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2021–2022 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 9 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

9.1. Фёдор задумал натуральное число, нацело делящееся на 300, и выписал все его натуральные делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечётных чисел, выписанных Фёдором, меньше суммы чётных.

9.2. В треугольнике ABC провели медиану BM . Оказалось, что $\angle ABM = 40^\circ$, $\angle MBC = 70^\circ$. Найдите отношение $AB : BM$. Ответ обоснуйте.

9.3. Числа x и y удовлетворяют равенству:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = \sqrt{7x(1-y)} + \frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

Найдите наибольшее значение выражения $x + 7y$. Ответ обоснуйте.

9.4. От фирмы «Рога и копыта» после ее банкротства осталось 17 рогов, 2 копыта и одна гиля. Все это богатство поделили между собой равными по весу частями Паниковский и Балаганов, причем гиля целиком досталась Балаганову. Рога и копыта на части тоже не пилили. Каждый рог тяжелее каждого копыта и легче гири на одну и ту же величину. Сколько рогов и копыт у Паниковского? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

9.5. На экзамене каждому из трёх студентов был предложен один и тот же тест из 40 вопросов. Назовем вопрос *неподъёмным*, если на него все ответили неверно; *трудным*, если только один студент ответил верно, *лёгким*, если ответили верно ровно два студента, и *тривиальным*, если верно ответили все трое. Известно, что лёгких вопросов вдвое больше, чем неподъёмных. Каково наибольшее число неподъёмных вопросов может содержать тест, если общее число верных ответов равно 64? Ответ обоснуйте.

9.6. Задача Архимеда. Пусть D — середина дуги AC , B — некоторая точка этой дуги, отличная от D . Докажите, что точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на ломаную ABC , делит длину этой ломаной пополам.