Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2021 – 2022 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *У туристов в походе имелось несколько одинаковых пачек печенья. На дневном привале они вскрыли две пачки и разделили печенье из них поровну между всеми участниками похода. При этом одно печенье осталось лишним, и туристы скормили его белке. На вечернем привале они вскрыли ещё три пачки, и тоже поделили печенье из них поровну. Теперь остались лишними 13 печений. Сколько туристов ходило в поход? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть в группе n туристов, а в каждой пачке m печений (числа m и n — натуральные, при этом $n > 13$.) По условию числа $x = 2m - 1$ и $y = 3m - 13$ делятся на число n нацело. Тогда на n нацело делится и число $3x - 2y = 23$. Но число 23 — простое и имеет только два натуральных делителя. Делитель 1 не годится, так как он меньше 13. Значит, $n = 23$.

Ещё надо удостовериться, что такая ситуация возможна. Итак, пусть в группе 23 туриста. Тогда описываемая ситуация будет иметь место, например, если в каждой пачке по 12 печений.

Ответ: В группе 23 туриста.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Доказано, что туристов могло быть только 23, а также приведён пример количества печений в пачке, при котором реализуется условие задачи	7 баллов
Доказано, что туристов могло быть только 23, но не приведён пример количества печений в пачке, при котором реализуется условие задачи	5 баллов
Приведён верный пример (с 23 туристами), но не доказано, что другого количества туристов быть не может	2 балла
Верный ответ без обоснования и примера	0 баллов

8.2. *Работа была поделена поровну между работниками в бригаде. После первого дня посчитали, сколько человек выполнило не менее* 30 *процентов своей доли — таких оказалось* 70 *процентов всех работающих. Когда стали считать только тех, кто выполнил не менее* 70 *процентов своей доли — таких оказалось 30 процентов работавших. Можно ли быть уверенным, что выполнена хотя бы треть работы? Ответ обоснуйте.*

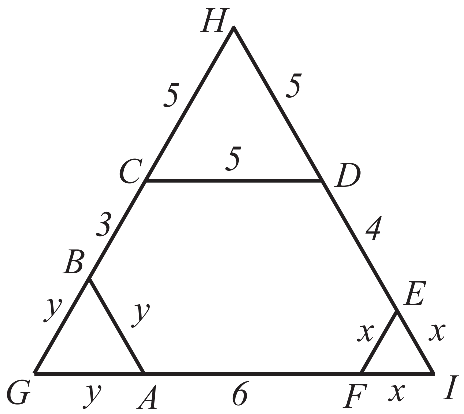
Решение: Приведём пример, когда условие задачи выполнено, но треть работы не сделана. Пусть работников было 10, а работа заключается в создании 300 однотипных деталей. Тогда каждому работнику надо сделать 30 деталей, а треть работы составляет 100 деталей. Пусть три работника сделали по 21 детали (ровно 70%), ещё четверо — по 9 деталей (ровно 30%), и ещё трое к работе не приступили. Тогда условие задачи выполнено, но всего сделано 99 деталей — менее трети.

Ответ: Нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведён верный контрпример к вопросу задачи	7 баллов
Рассмотрен частный случай, показывающий, что могла быть выполнена хотя бы треть работы	0 баллов
Неверный контрпример или неверное обоснование отсутствия контрпримера	0 баллов

8.3. *В выпуклом 6-угольнике $ABCDEF$ все углы равны $120°$. Известны длины четырёх его сторон: $BC = 3$, $CD = 5$, $DE = 4$ и $AF = 6$. Найдите длины двух оставшихся стороны шестиугольника. Ответ обоснуйте.*



К решению задачи 8.3

Решение: Пусть прямые AF и BC пересекаются в точке G, прямые BC и DE — в точке H, а прямые DE и AF в точке I — см. рисунок. Тогда $\angle ABG = \angle BAG = 60°$, поэтому треугольник ABG равносторонний. Это же справедливо для треугольников CDH и EFI. Обозначим $AB = y$, $EF = x$. Тогда $GH = y+3+5 = y+8$, $HI = 5+4+x = 9+x$, $IG = x + 6 + y$. Но треугольник GHI тоже равносторонний (все его углы по $60°$). Значит,

$$y + 8 = 9 + x = 6 + x + y.$$

Из этих равенств находим $x = 2$, $y = 3$.

Ответ: 2 и 3.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример шестиугольника, удовлетворяющего условиям задачи	1 балл
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

8.4. *Известно, что* $a^2+2=b^4$, $b^2+2=c^4$, $c^2+2=a^4$. *Чему равно произведение* $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)$? *Найдите все возможные значения и докажите, что других нет.*

Решение: Вычтем из обеих частей каждого уравнения по 1, получим:

$$a^2+1=b^4-1=(b^2-1)(b^2+1),$$
$$b^2+1=(c^2-1)(c^2+1), \qquad c^2+1=(a^2-1)(a^2+1).$$

Перемножим левые и правые части всех трёх уравнений, и после сокращения на положительное число $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ получим $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)=1$. Значит, искомое произведение может равняться только 1. Так как в процессе преобразований имел место неравносильный переход (умножение левых и правых частей нескольких уравнений это только переход к следствию), необходимо показать, что число 1 может получиться. Этот случай будет иметь место, например, при $a=b=c=\sqrt{2}$.

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ с подтверждающим примером чисел a, b, c	7 баллов
Верный и обоснованный ответ без подтверждающего примера чисел a, b, c	6 баллов
Пример чисел a, b, c, удовлетворяющих условию задачи, при которых значение искомого выражения равно 1	1 балл
Алгебраические выкладки, не приведшие к решению, а также ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

8.5. *При полной заправке топливом моторная лодка проплывает против течения реки ровно 40 км, или ровно 60 км по течению. Какое наибольшее расстояние моторная лодка может проплыть по реке, если топлива должно хватить на путь туда и обратно, в исходную точку отправления? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Пустим одновременно с лодкой по реке плот, который движется по течению, и будем следить за лодкой с этого плота. Тогда, куда бы лодка ни шла, вверх или вниз по реке, она к моменту расхода топлива будет от плота на одном и том же расстоянии. Значит, плот в этот момент будет на середине отрезка между крайними возможными положениями лодки, то есть на $(60-40):2=10$ км ниже точки старта. Лодка будет от него на расстоянии 50 км. Значит, скорость лодки больше скорости течения в $50:10=5$ раз. Это значит, что по течению лодка идёт со скоростью в 6 раз большей скорости течения, а против — со скоростью в 4 раза большей. То есть по течению лодка плывёт в 1,5 раза быстрее, чем против. Чтобы расстояние туда и обратно было одинаковым, нужно, следовательно, плыть против течения в 1,5 раза больше, чем по течению, то есть 3/5 всего времени движения. За это время лодка удалится от плота на расстояние 30 км, а плот будет снесён рекой на расстояние 6 км. Значит, лодка может проплыть 24 км в одну сторону.

Способ 2. Пусть скорость лодки x км/ч, течения — y км/ч, а запаса горючего в лодке хватает на t часов пути. Условие задачи записывается в виде системы

$$\begin{cases} (x+y)\cdot t &= 60, \\ (x-y)\cdot t &= 40. \end{cases}$$

Почленно складывая уравнения системы, получаем, что $xt = 50$, а почленно вычитая — что $yt = 10$. Пусть теперь мы отправимся вверх по течению и будем плыть такое время T, чтобы за оставшееся время $t-T$ вернуться в точку старта. Это значит, что должно быть выполнено условие $(x-y)T = (x+y)(t-T)$. С учётом первого уравнения системы получаем из него, что $xT = 30$. Так как $xt = 50$, то $T = 0{,}6t$. Тогда за время T лодка отдалится от стоянки на расстояние, равное $(x-y)\cdot 0{,}6t = 0{,}6\cdot 40 = 24$ км.

Ответ: 24 км.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Получена (но не решена) система уравнений, верно описывающая условия задачи	1 балл
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

8.6. *Несколько восьмиклассников решали задачи. Учитель не записал у себя в журнале, сколько всего было учеников, и сколько задач каждый из них решил. Зато, он помнит, что, с одной стороны, каждый ученик решил задач больше, чем пятая часть от того, что решили остальные. А с другой стороны, он знает, что каждый ученик решил задач меньше, чем треть от того, что решили остальные. Сколько могло быть восьмиклассников? Найдите все варианты и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть восьмиклассников было n. Пусть, кроме этого, i-й восьмиклассник ($i = 1, \ldots, n$) решил a_i задач. По условию для любого i выполнены неравенства $a_i > \frac{1}{5}\cdot(S-a_i)$ и $a_i < \frac{1}{3}\cdot(S-a_i)$, где $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — общее количество решённых задач, причём каждая задача учтена столько раз, сколько восьмиклассников её решили. Неравенства равносильны системе двойных неравенств

$$\frac{S}{6} < a_i < \frac{S}{4}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Сложив почленно все эти неравенства, получим

$$\frac{nS}{6} < a_1 + a_2 + \ldots + a_i = S < \frac{nS}{4},$$

что после сокращения на S равносильно условию $4 < n < 6$. Так как n — число целое, то $n = 5$. Ситуация с $n = 5$ возможна, например, если все ученики решили по 1 задаче.

Ответ: 5 восьмиклассников.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ с указанием, сколько задач решил каждый из учеников	7 баллов
Верный и обоснованный ответ без примера того, сколько задач решил каждый из учеников	6 баллов
Выписана система неравенств, верно описывающая условия задачи	1 балл
Верный ответ без обоснования с примером того, сколько задач решил каждый из учеников	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов