

Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
в 2021 – 2022 учебном году

Ответы и решения

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2021 – 2022 учебном году  
6 класс**

*Время выполнения заданий – 4 часа*

**6.1.** *Котенок Малыш может облизать себя с головы до кончика хвоста за полчаса. Его мама Муся может облизать Малыша за 5 минут, а себя она способна облизать за 20 минут. Сколько времени придется трудиться Малышу, чтобы облизать свою маму? Ответ обоснуйте.*

**Решение:** Площадь вылизываемой части мамы в  $20 : 5 = 4$  раза больше площади вылизываемой части котёнка. Значит, на маму котёнок потратит в 4 раза больше времени, чем на себя, то есть  $0,5 \cdot 4 = 2$  часа.

**Ответ:** 2 часа.

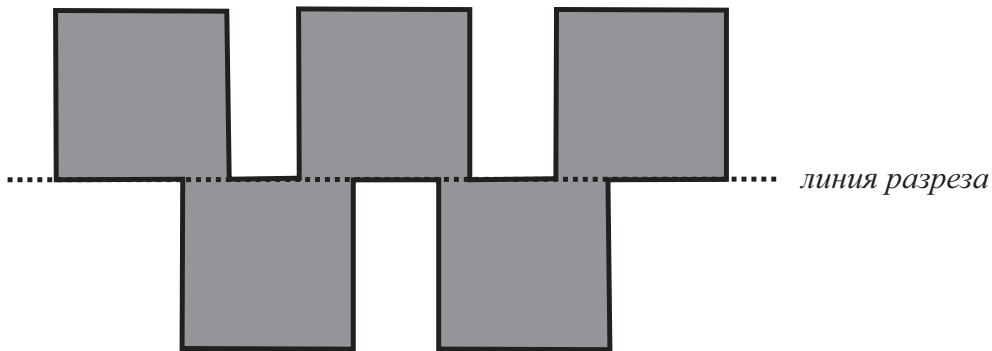
Рекомендации по проверке:

<b>есть в работе</b>	<b>баллы</b>
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения ответ неверен из-за арифметической ошибки	6 баллов
Задача не решена, но верно найдено одно из двух: — скорость вылизывания мамы больше скорости котёнка в 6 раз; — площадь мамы больше площади котёнка в 4 раза;	3 балла
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

**6.2.** *Как известно, пицца может быть сделана любой плоской формы, не обязательно круглой. Могло ли случиться так, что некоторую пиццу удастся одним прямолинейным разрезом разделить ровно на 5 одинаковых квадратных плоских кусков? Ответ обоснуйте. Считается, что изначально пицца сделана в виде одного цельного куска лепёшки.*

**Решение:**

**Ответ:** Можно (см. рисунок).



К решению задачи 6.2

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов
Неверный ответ	0 баллов

**6.3.** У Маши есть двухрублёвые и пятирублёвые монеты. Если она возьмёт все свои двухрублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить четыре пирожка. Если все пятирублёвые — ей не хватит 60 рублей на покупку пяти пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки шести пирожков. Сколько стоит пирожок? Ответ обоснуйте.

**Решение:**

Способ 1. Добавим Маше 60 рублей (например, одной «купюрой»). Тогда ей денег хватит на 6 пирожков ровно, при этом если убрать все двухрублёвые — то денег останется на 5 пирожков, а если все пятирублёвые — на 4 пирожка. Значит, на двухрублёвые монеты Маша может купить 1 пирожок, на пятирублёвые — 2 пирожка, а остальные 3 купит на 60-рублёвую «купюру». Тогда один пирожок стоит 20 рублей. (При этом у Маши 10 двухрублёвых монет и 8 пятирублёвых.)

Способ 2. Пусть у Маши  $x$  монет по 2 рубля,  $y$  монет по 5 рублей, а пирожок стоит  $z$  рублей. Тогда  $2x + 60 = 4z$ ,  $5y + 60 = 5z$ ,  $2x + 5y + 60 = 6z$ . Сложив первые два уравнения и отняв третье, получим  $60 = 3z$ , откуда  $z = 20$ .

**Ответ:** 20 рублей.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Верно составлено уравнение или система уравнений, полностью описывающих условие задачи	3 балла

Есть идея (не доведённая до решения) добавить Маше 60 рублей	2 балла
Показано, что пирожок может стоить 20 рублей, но не обоснована единственность ответа	1 балл
Верный ответ без всякого обоснования	0 баллов

**6.4.** В рассказе А. П. Чехова «Репетитор» великовозрастному второкласснику Пете Удодову была задана такая задача: «Купец купил 138 аршинов чёрного и синего сукна за 540 рублей. Сколько он купил того и другого сукна, если синее стоит 5 рублей за аршин, а чёрное — 3 рубля за аршин?». Ни сам Петя, ни его репетитор, гимназист VII класса Егор Зиберов, задачу решить не смогли, а вот отец репетитруемого, губернский секретарь Удодов, её решил, проделав на счётах следующие действия:

- 1)  $138 \cdot 3 = 414$ ;
- 2)  $540 - 414 = 126$ ;
- 3)  $126 : 2 = 63$ ;
- 4)  $138 - 63 = 75$ .

*Ответ: 63 аршина синего сукна и 75 аршинов чёрного.*

*Докажите, что задача решена верно, то есть объясните, что губернский секретарь находил каждым из действий.*

**Решение:** Отец предположил (это можно сделать), что купец сначала купил чёрное сукно в избытке (все 138 рулонов), а затем обменивал чёрное сукно на синее в отношении 1:1, но с доплатой  $5 - 3 = 2$  рубля за аршин. Тогда первым действием найдена сумма, которая была уплачена за 138 аршинов чёрного сукна, вторым — сумма которая ушла на доплату, третьим — количество аршинов чёрной ткани, которое пошло на обмен (оно же — количество синей ткани) и последним четвёртым — количество оставшейся чёрной ткани.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно объяснены все 4 действия	7 баллов
Верно объяснены 3 действия из 4-х	5 баллов
Верно объяснены 2 действия из 4-х	3 балла
Верно объяснено 1 действие из 4-х	1 балл
Ни одно действие не объяснено верно	0 баллов

**6.5.** У Бори есть четыре ведра объёмом 5, 6, 7 и 8 литров. Ведра объёмом 5 и 7 литров доверху наполнены водой, два других ведра пустые. Других источников воды нет. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть,

в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро целиком опустеет, или второе ведро заполнится доверху. Мог ли Боря за несколько шагов получить:

а) по меньшей мере в двух вёдрах ровно по 3 литра воды;

б) во всех четырёх вёдрах ровно по 3 литра воды? Ответы обоснуйте.

**Решение:** а) Вариантов переливаний может быть несколько. Например, такой:

1) Наполняем 6-литровое ведро из 7-литрового. 2) Из 5-литрового всю воду выливаем в 8-литровое. 3) Из 6-литрового дополняем 8-литровое (туда отольётся как раз  $8 - 5 = 3$  литра). Теперь в 6-литровом ведре ровно 3 литра и его можно отставить. 8-литровое ведро полно, пятилитровое пусто, а в семилитровом воды ровно 1 литр. 4) Из 8-литрового ведра наполняем 5-литровое, и 8-литровом остаётся тоже ровно 3 литра воды.

б) Докажем, что Боре этого сделать не удастся. Предположим противное и рассмотрим последнее переливание, сделанное Борей. В результате него в каждом ведре должно оказаться по 3 литра, значит, ведро, из которого выливали воду, не опустело. Тогда ведро, в которое вливали воду, должно наполниться доверху. Но 3-х литровых вёдер у нас нет. Противоречие.

**Ответ:** а) Мог. б) Не мог.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведена верная последовательность переливаний в пункте а) и доказана невозможность выполнения пункта б)	7 баллов
Доказана невозможность выполнения пункта б), а верной последовательности переливаний в пункте а) нет	4 балла
Приведена верная последовательность переливаний в пункте а), но отсутствует (или неверно) доказательство пункта б)	3 балла
Ответы верные, но не обоснованные или обоснованные неверно	0 баллов